Mathématiques
Faculté des sciences d'Orsay

Feuille 1

Groupes et géométrie
M2 AAG 2024–2025

Exercice 1 Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2, et $\{X, Y\}$ une base de V.

1. Montrer que toute application bilinéaire anticommutative sur V définit un crochet de Lie.

On appelle $\mathfrak{aff}(\mathbf{R})$, l'algèbre de Lie $(V, [\,\cdot\,,\cdot\,])$ où $[X, Y] = Y$.

2. Montrer que toute algèbre de Lie de dimension 2 réelle est soit abélienne, soit isomorphe à $\mathfrak{aff}(\mathbf{R})$.
3. Vérifier que chacune de ces algèbres est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. [Question pour la semaine 4.] Ce groupe de Lie peut-il être choisi compact ?

Exercice 2 Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$,
on définit sa suite centrale (C_n) par $C_0 = \mathfrak{g}$ et pour $n \geq 0$, $C_{n+1} = [C_n, \mathfrak{g}]$,
et on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente s'il existe un $n \geq 0$ tel que $C_n = 0$;
on définit sa suite dérivée (D_n) par $D_0 = \mathfrak{g}$ et pour $n \geq 0$, $D_{n+1} = [D_n, D_n]$,
et on dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe un $n \geq 0$ tel que $D_n = 0$.
Montrer que les groupes suivants sont des groupes de Lie, puis décrire leurs algèbres de Lie respectives (on donnera à chaque fois une base pour laquelle on calculera les crochets de Lie entre éléments de la base). Préciser si celles-ci sont abéliennes, nilpotentes, résolubles.

1. $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) = \{x \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \det x = 1\}$
2. $\mathrm{SU}(2) = \{x \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \mid {}^t\overline{x}x = I_2 \ \&\ \det x = 1\}$
3. $\mathrm{Heis}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.
4. $\mathrm{Sol}(3) = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$, muni de la structure de variété produit, où $t \in \mathbf{R}$ agit sur $\mathbf{R}^2$ via la matrice $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. (On réalisera $\mathrm{Sol}(3)$ comme un sous-groupe plongé de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$.)

Groupes de Lie classiques
Soient n, p et q des entiers non nuls. On définit, en notant $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice identité, $I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbf{R})$, et $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$, les groupes suivants :

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \ :\ \det x = 1\} \\
\mathrm{SL}_n(\mathbf{C}) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \ :\ \det x = 1\} \\
\mathrm{SL}(n, \mathbf{H}) &= \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbf{H}) \ :\ \det x = 1\} \\[4pt]
\mathrm{O}(n) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \ :\ {}^t x\, x = I_n\} \\
\mathrm{SO}(n) &= \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) \\
\mathrm{SO}^*(2n) &= \{x \in \mathrm{SO}_{2n}(\mathbf{C}) \ :\ {}^t\overline{x}\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{O}(p, q) &= \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbf{R}) \ :\ {}^t x\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{SO}(p, q) &= \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbf{R}) \\
\mathrm{O}_n(\mathbf{C}) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \ :\ {}^t x\, x = I_n\} \\
\mathrm{SO}_n(\mathbf{C}) &= \mathrm{O}_n(\mathbf{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{C}) \\
\mathrm{SO}(n, \mathbf{H}) &= \{x \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{H}) \ :\ \tau_2({}^t x)\, x = I_n\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(n) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \ :\ {}^t\overline{x}\, x = I_n\} \\
\mathrm{SU}(n) &= \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{C}) \\
\mathrm{SU}^*(2n) &= \{x \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbf{C}) \ :\ J_n\, x = \overline{x} J_n\} \\
\mathrm{U}(p, q) &= \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbf{C}) \ :\ {}^t\overline{x}\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{SU}(p, q) &= \mathrm{U}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbf{C}) \\[4pt]
\mathrm{Sp}_n(\mathbf{R}) &= \{x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R}) \ :\ {}^t x\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{Sp}_n(\mathbf{C}) &= \{x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{C}) \ :\ {}^t x\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{Sp}(p, q) &= \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbf{H}) \ :\ {}^t\overline{x}\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{Sp}(n) &= \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbf{H}) \ :\ {}^t\overline{x}\, x = I_n\} \\
\mathrm{Sp}*(n) &= \mathrm{Sp}_n(\mathbf{C}) \cap \mathrm{U}(2n)
\end{aligned}$$

On les appelle groupes de Lie classiques.

Exercice 3 *Isomorphismes* $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ *et* $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathfrak{so}(1,2)$.
Les définitions des groupes de Lie classiques sont rappelées plus haut.

1. Vérifier que $\mathrm{SU}(2)$ est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
   En déduire que $\mathrm{SU}(2)$ est difféomorphe à une variété de dimension 3 bien connue.
2. Montrer que $E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
   forment une base de son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.
   Expliciter les relations de crochet entre E_1, E_2 et E_3.

Sur $\mathfrak{su}(2)$, on considère la forme quadratique $Q(M) = \det(M)$.

3. Soit $\varphi : \mathfrak{su}(2) \to \mathbf{R}^3$ donnant les coordonnées de $U \in \mathfrak{su}(2)$ dans la base $\{2E_1, 2E_2, 2E_3\}$.
   À quelle forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ correspond Q via φ ?
4. En déduire que la représentation adjointe définit naturellement
   un morphisme $\rho : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.
5. Montrer que ρ est une submersion, puis que c'est un morphisme surjectif.
   Quel est son noyau ?
6. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{SO}(3)$ est difféomorphe à une variété de dimension 3
   bien connue et que $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes.

On pose $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que H, E et F forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$.
   Expliciter les relations de crochet entre H, E, F.

Étant donnée une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension finie, sa forme de Killing
est la forme bilinéaire symétrique $B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ définie par $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$.

8. Montrer qu'un isomorphisme d'algèbres de Lie envoie forme de Killing sur forme de Killing.
9. On note B la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$.
   Déterminer la matrice de B dans la base E, H, F.
   Quelle est sa signature ?
10. Déterminer la signature de la forme de Killing de $\mathfrak{su}(2)$.
    En déduire que les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ ne sont pas isomorphes.
11. Adapter ce qui a été fait ci-dessus et montrer que les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ et $\mathfrak{so}(1,2)$
    sont isomorphes.