Feuille 3

Crochet des champs de vecteurs et application exponentielle

Exercice 1 Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur un groupe de Lie G. Calculer le flot φ_t de X.

Exercice 2 Soient X, Y deux champs de vecteurs sur une variété M et φ_t, ψ_t les flots locaux de X et de Y respectivement.

1. Montrer que $[X,Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t)^*(Y)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in M$, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_t \circ \varphi_t \circ \psi_{-t} \circ \varphi_{-t}(x) = 0$.
3. Montrer que, pour tout $x \in M$, $[X,Y](x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+}\psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}} \circ \psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}}(x)$.

Soient X, Y deux éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G, et $\exp : \mathfrak{g} \to G$ l'application exponentielle de G.

4. Montrer que $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = 0$.
5. Montrer que $[X,Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+}\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y)\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y)$.

Revêtement universel du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Exercice 3 On désigne par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices de taille 2×2 et de déterminant $+1$, à coefficients réels.

1. Montrer que tout sous-groupe à un paramètre $(g^t)_{t\in\mathbf{R}}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est conjugué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à l'un des trois sous-groupes suivants :
$$\left(s^t = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{-at} \end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbf{R}}, \quad \left(u^t = \begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbf{R}}, \quad \left(r^t = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbf{R}}.$$
Si a est non nul, on dit que $(g^t)_{t\in\mathbf{R}}$ est *hyperbolique* dans le premier cas, *parabolique* dans le second, et *elliptique* sinon.
2. Si $g^t = \exp(tZ)$ avec $Z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, faire le lien entre le caractère hyperbolique, parabolique, ou elliptique de (g^t) et le signe de $B(Z,Z)$, où B désigne la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.
3. L'application $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est-elle surjective ?

On note $\pi : \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, et $\widetilde{\exp}$ l'application exponentielle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ dans $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$.

4. Quel est le lien entre $\exp$, $\widetilde{\exp}$ et π ?
5. Décrire le centre de $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$.
6. Montrer que si $B(Z,Z) < 0$, alors $\widetilde{(\widetilde{\exp}(tZ))_{t\in\mathbf{R}}}$ est un sous-groupe de Lie plongé de $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, isomorphe à $\mathbf{R}$ et qui contient le centre de $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$.
7. Existe-t-il des sous-groupes compacts connexes autres que $\{e\}$ dans $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$?