

Exercice 1 Classifier à isomorphisme près

- tous les groupes de Lie connexes ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbf{R})$;
- tous les groupes de Lie connexes ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{heis}(3)$.

Exercice 2 Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

1. Soit H un sous-groupe fermé de G .
Montrer que si H n'est pas discret, il contient un sous-groupe à un paramètre non trivial.
2. On note $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $Z(G)$ les centres respectifs de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et du groupe de Lie G .
En supposant G connexe, montrer que $Z(G)$ est discret si et seulement si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
3. Donner un exemple de groupe connexe G tel que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ mais $Z(G) \neq \{e\}$.

Exercice 3 Soit V un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie, et $\omega : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ une forme bilinéaire anti-symétrique. On considère l'opération $*$ sur $V \times \mathbf{R}$ définie par

$$\forall v, v' \in V \quad \forall t, t' \in \mathbf{R} \quad (v, t) * (v', t') = \left(v + v', t + t' + \frac{1}{2}\omega(v, v') \right)$$

1. Montrer que $(V \times \mathbf{R}, *)$ est un groupe de Lie, que l'on notera G .
2. Décrire l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G , et montrer qu'elle est nilpotente.
3. Montrer que $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un difféomorphisme.

Exercice 4 Soit \mathfrak{g} une \mathbf{R} -algèbre de Lie de dimension finie telle que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
Montrer qu'il existe un groupe de Lie connexe G tel que $Z(G) = \{e\}$,
dont l'algèbre de Lie est isomorphe à \mathfrak{g} .
Montrer qu'un tel groupe de Lie est unique à isomorphisme près.

Exercice 5 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$.

Exercice 6 On rappelle que le groupe de Heisenberg, noté $\mathrm{Heis}(3)$, est constitué des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ avec des 1 sur la diagonale.

Soient Γ le sous-groupe engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{heis}(3)$.

1. Soit $\varphi : \mathfrak{heis}(3) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbf{R})$ un morphisme d'algèbre de Lie. Montrer que $\varphi(Z)$ est nilpotent.
2. En déduire que $\{\exp(t\varphi(Z)) \mid t \in \mathbf{R}\}$ est trivial ou non borné.

Soit $\rho : \mathrm{Heis}(3)/\Gamma \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ un morphisme de groupes de Lie.

3. Montrer que le sous groupe à 1 paramètre $(\exp(td_e\rho(Z)))_t$ est compact.
4. En déduire que ρ n'est pas injectif.
Autrement dit, $\mathrm{Heis}(3)/\Gamma$ n'a pas de représentation linéaire fidèle.

Exercise 1 Classify up to isomorphism

- all connected Lie groups with $\mathfrak{aff}(\mathbf{R})$ as their Lie algebra;
- all connected Lie groups with $\mathfrak{heis}(3)$ as their Lie algebra.

Exercise 2 Let G be a Lie group with Lie algebra \mathfrak{g} .

1. Let H be a closed subgroup of G .
Show that if H is not discrete, it contains a nontrivial one-parameter subgroup.
2. Denote by $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ and $Z(G)$ the centres of the Lie algebra \mathfrak{g} and of the Lie group G .
Assuming G is connected, show that $Z(G)$ is discrete if and only if $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
3. Give an example of a connected Lie group G such that $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ but $Z(G) \neq \{e\}$.

Exercise 3 Let V be an \mathbf{R} -vector space of finite dimension and $\omega : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ an anti-symmetric bilinear form. Consider the operation $*$ on $V \times \mathbf{R}$ defined by

$$\forall v, v' \in V \forall t, t' \in \mathbf{R} \quad (v, t) * (v', t') = \left(v + v', t + t' + \frac{1}{2}\omega(v, v') \right)$$

1. Show that $(V \times \mathbf{R}, *)$ is a Lie group, which we will denote by G .
2. Describe the Lie algebra \mathfrak{g} of G , and show it is nilpotent.
3. Show that $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ is a diffeomorphism.

Exercise 4 Let \mathfrak{g} be a finite-dimensional Lie algebra over \mathbf{R} such that $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Show there exists a connected Lie group G such that $Z(G) = \{e\}$, whose Lie algebra is isomorphic to \mathfrak{g} . Show that such a Lie group is unique up to isomorphism.

Exercise 5 Let $n \geq 1$ be an integer.

Show any compact subgroup of $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ is conjugate to a subgroup of $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$.

Exercise 6 Recall that the Heisenberg group, $\mathrm{Heis}(3)$, consists in upper triangular matrices in $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ with all diagonal elements equal to 1.

Let Γ be the subgroup generated by $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{heis}(3)$.

1. Let $\varphi : \mathfrak{heis}(3) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbf{R})$ be a Lie algebra morphism. Show that $\varphi(Z)$ is nilpotent.
2. Deduce that $\{\exp(t\varphi(Z)) \mid t \in \mathbf{R}\}$ is either trivial or unbounded.

Let $\rho : \mathrm{Heis}(3)/\Gamma \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ be a Lie group morphism.

3. Show that the one-parameter subgroup $(\exp(td_e\rho(Z)))_t$ is compact.
4. Deduce that ρ is not injective.
In other words, $\mathrm{Heis}(3)/\Gamma$ has no faithful linear representation.