

Orbites coadjointes

Exercice 1 On fixe une action lisse d'un groupe de Lie réel compact G sur une variété M . On associe à tout $X \in \mathfrak{g}$ le champ de vecteurs X_M sur M défini par $X_M(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tX)x$.

1. Montrer que, pour tous X et Y dans \mathfrak{g} , $[X_M, Y_M] = -[X, Y]_M$.
2. Soit $x \in M$, on note \mathfrak{g}_x l'algèbre de Lie du stabilisateur G_x .
Montrer que $X \mapsto X_M(x)$ induit un isomorphisme entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$ et $T_x(G \cdot x)$.

On appelle représentation adjointe de G la représentation $G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ qui envoie g sur $\text{Ad}(g)$, et représentation coadjointe de G la représentation $G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*)$ qui envoie g sur ${}^t(\text{Ad}(g^{-1}))$.

3. Montrer que, pour tous X et Y dans \mathfrak{g} , $X_{\mathfrak{g}}(Y) = [X, Y]$.
4. Montrer que, pour tout X dans \mathfrak{g} et tout λ dans \mathfrak{g}^* , $X_{\mathfrak{g}^*}(\lambda) = -{}^t(\text{ad } X)(\lambda)$.
5. On fixe λ dans \mathfrak{g}^* .
Montrer que la forme bilinéaire ω définie sur \mathfrak{g} par $\omega(X, Y) = \lambda([X, Y])$ passe au quotient en forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda$.
6. Montrer que la forme différentielle G -invariante ω induite par ω sur G/G_λ est symplectique, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une 2-forme différentielle non dégénérée en chaque point et fermée.
7. Décrire les orbites de l'action coadjointe de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Actions de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ et représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

Exercice 2 On s'intéresse à l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur des variétés de (très) petite dimension.

1. Soit M une variété connexe de dimension 1 admettant une action lisse et transitive du groupe $\text{SL}_2(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer l'existence d'une sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$.
 - (b) En étudiant les valeurs propres de $\text{ad}(X)$ pour $X \in \mathfrak{h}$, montrer que \mathfrak{h} s'identifie à la sous-algèbre de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ engendrée par $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 - (c) En déduire que M est difféomorphe au cercle S^1 .
2. En déduire que toute action lisse de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur le cercle est soit triviale, soit transitive.
3. Montrer qu'il n'existe aucune action lisse non triviale de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la droite réelle.
4. On considère une action lisse de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la sphère S^2 . On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.
 - (a) Grâce à l'exercice 1, montrer qu'il existe des points x et y de S^2 tels que $H \in \mathfrak{g}_x$ et $E \in \mathfrak{g}_y$.
On pourra admettre que tout champ de vecteurs lisse sur S^2 s'annule quelque part.
 - (b) En déduire que l'action considérée ne peut pas être transitive.