Mathématiques | **Feuille 6** | Groupes et géométrie
Faculté des sciences d'Orsay | | M2 AAG 2024–2025

Feuille 6

Exercice 1 *Connexion de Levi-Civita sur une sous-variété riemannienne.*

1. En utilisant ces coordonnées pour la sphère S^2 :
$$(\theta,\varphi)\mapsto(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)$$
calculer
$$D_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad D_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad D_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\varphi},\qquad D_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$
2. On paramètre le tore T^2 à partir de $S^1\times S^1$ de deux façons :
$$\varphi_1(\theta,\varphi)=(\exp(i\theta),\exp(i\varphi))$$
$$\varphi_2(\theta,\varphi)=((2+\cos\theta)\cos\varphi,(2+\cos\theta)\sin\varphi,\sin\theta)$$
Comparer les valeurs de $[\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}]$ pour T^2 vu comme sous-variété riemannienne de $\mathbb{R}^4$ via φ_1 et comme sous-variété riemannienne de $\mathbb{R}^3$ via φ_2.

Exercice 2 *Transport parallèle sur un cône et sur une sphère.*

1. Dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes (x,y,z), on considère une demi-droite depuis l'origine du plan xz faisant un angle α avec l'axe Oz, et le cone C de révolution autour de l'axe Oz qu'elle engendre. Soit $c:[a,b]\to C$ une courbe fermée autour du sommet du cône, et X un champ de vecteurs parallèle le long de c.
Calculer l'angle entre $X(a)$ et $X(b)$.
2. De même pour un champ de vecteurs parallèle le long d'un petit cercle sur la sphère S^2.

Exercice 3 *Géodésiques.*

1. Les géodésiques de $\mathbb{R}^n$ sont les droites paramétrées à vitesse constante.
2. Les géodésiques d'une n-variété riemannienne $M\subset\mathbb{R}^{n+p}$ sont les courbes à accélération normale (i.e. le champ donné par le vecteur accélération est partout normal à M).
3. Les géodésiques de la sphère (S^n,can) sont les grands cercles paramétrés à vitesse constante.

Exercice 4 *Encore des géodésiques*

1. Géodésiques sur le n-tore plat standard $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.
2. Geodesics sur d'autres n-tores plats $\mathbb{R}^n/\Lambda$.
3. Géodésiques sur la bouteille de Klein plate standard.
4. Géodésiques sur d'autres bouteilles de Klein plates.