Feuille 9

Exercice 1. Variation première de la longueur des courbes et application.
Soit (M, g) une variété riemannienne. Soient $c : [0, L] \to M$ une courbe lisse et $Y : [0, L] \to TM$ un champ de vecteurs lisse le long de c.

1. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ de sorte que l'application $(s, t) \mapsto c_s(t) = \exp_{c(t)}(sY(t))$ soit définie sur $[-\epsilon, \epsilon] \times [0, L]$.

On suppose que c est paramétrée à vitesse 1. Soit $c_s : [-\epsilon, \epsilon] \times [0, L] \to M$ une variation quelconque de c de champs de variations J. On note $L(c_s)$ la longueur de c_s et $E(c_s)$ l'énergie de la courbe c_s.

2. Montrer que

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c_s) = -\int_0^L g_{c(t)}\left(J(t), \frac{D\dot{c}}{dt}\right) dt + g_{c(L)}(J(L), \dot{c}(L)) - g_{c(0)}(J(0), \dot{c}(0))$$

3. Montrer que si les extrémités de c_s sont fixes et que c est une géodésique alors $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} E(c_s) = 0$.
4. Montrer que si pour toute variation c_s à extrémités fixes, $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} E(c_s) = 0$ alors c est une géodésique.

Exercice 2. Géométrie des surfaces de révolution.
Soit $c :]0, L[\to \mathbb{R}^3$ une courbe contenue dans le plan d'équation $y = 0$, de classe C^∞, paramétrée par la longueur d'arc. On écrit, pour tout $u \in]0, L[$, $c(u) = (r(u), 0, z(u))$. On suppose que r est une fonction strictement positive, et que l'image de c est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. On considère la surface de révolution S de $\mathbb{R}^3$ obtenue en faisant tourner c autour de l'axe (Oz).
On paramètre S par $(u, \theta) \mapsto (r(u)\cos\theta, r(u)\sin\theta, z(u))$, $u \in]0, L[$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On munit S de la métrique riemannienne g induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que dans les coordonnées (u, θ), la métrique g est donnée par l'expression :

$$g = du^2 + r(u)^2 d\theta^2.$$

2. Soit ∇ la connexion de Levi–Civita de la métrique g. Exprimer les symboles de Christoffel de ∇ dans le champ de repères $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \theta})$.

On appelle *méridiens* de S les “lignes de niveau” $\theta =$ constante, et *parallèles* les courbes $u =$ constante.

3. Montrer que les géodésiques de (S, g) sont les courbes $t \mapsto (u(t), \theta(t))$ satisfaisant

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot r'(u) r(u) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{du}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{r'(u)}{r(u)} = 0\,.$$

   Parmi ces géodésiques, identifier

   (a) les méridiens de (S, g) paramétrés à vitesse constante,

   (b) les parallèles paramétrés à vitesse constante.

4. Montrer que les géodésiques non-constantes satisfont $\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + r^2(u)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C$ et $r^2(u)\frac{d\theta}{dt} = R$, où $C \geq 0$ et R sont des constantes.
5. On suppose que $C = 1$ et $R > 0$. Montrer que $r(u(t)) \geq R$, lorsque t décrit l'intervalle de paramétrage de la géodésique. Décrire géométriquement le cas d'égalité. Faire quelques dessins !