Feuille 10

Exercice 1. Convexité des boules de petit rayon.
Soient (M,g) une variété riemannienne, m un point de M, et U un voisinage de l'origine dans T_mM sur lequel $\exp_m$ est un difféomorphisme sur son image. On considère sur U la métrique $h = \exp_m^* g$. Elle induit: d, distance sur U, et h_0 produit scalaire en 0 dont on note $\|u\| = h_0(u,u)^{\frac{1}{2}}$, la norme induite.

1. Pour $x \in U$, le tenseur de Christoffel définit une application bilinéaire Γ_x sur T_xU à valeurs dans T_xU par la formule : $\Gamma_x(u,v) = \Sigma_{k=1}^n \Sigma_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k(x) u_i v_j e_k$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tel que si x appartient à B_{ε_0}, la boule de centre 0 et de rayon ε_0 pour $\|\cdot\|$, on a $\|\Gamma_x(u,v)\| \leq \delta\|u\|\cdot\|v\|$, avec $0 \leq \delta < 1$.
2. Soit $c : [0,a] \to U$ une géodésique contenue dans B_{ε_0}. On suppose que pour un certain $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, et un certain $t_0 \in]0,a[$, on a $c(t_0) \in S_\varepsilon := \partial \overline{B}_\varepsilon$, et $\dot{c}(t_0) \neq 0$ tangent à S_ε. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour t suffisamment proche de t_0, l'on ait :
$$d(0,c(t))^2 \geq d(0,c(t_0))^2 + \lambda(t-t_0)^2.$$
(*Indication* : considérer la fonction $F(t) = \frac{\|c(t)\|^2}{2}$ et montrer que $F''(t_0) > 0$.)
3. En déduire que si $r > 0$ est assez petit, la boule $\overline{B}_r$ est convexe au sens où si x et y sont dans $\overline{B}_r$, il existe une géodésique, unique à reparamétrage affine près et minimisante, reliant x et y, entièrement contenue dans $\overline{B}_r$.

Exercice 2. Courbure sectionnelle et longueur des petits cercles.
Soient (M,g) une variété riemannienne et x un point de M. Soient P un 2–plan dans T_xM et (u,v) une base orthonormée de P. On pose $H(r,\theta) = \exp_x\big(r\cos(\theta)u + r\sin(\theta)v\big)$ pour $0 < r < \mathrm{inj}_x$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel r, on note C_r la courbe $\theta \mapsto H(r,\theta)$.

1. Montrer que, pour tout θ_0, $J_{\theta_0} : r \mapsto \frac{d}{d\theta}\big|_{\theta=\theta_0} H(r,\theta)$ est un champ de Jacobi.
2. Montrer que $\|J_\theta(r)\| = r - \frac{K(P)}{6} r^3 + o(r^3)$.
3. En déduire que $L(C_r) = 2\pi r \left(1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2)\right)$.
4. Retrouver la courbure de $\mathbb{S}^2$ en calculant directement $L(C_r)$.

Exercice 3. Surjectivité de l'exponentielle sur les groupes de lie compacts.
Soit G un groupe de Lie connexe, e son élément neutre, h une métrique riemannienne bi-invariante sur G.

1. Montrer que ∇, la connexion de Levi–Civita associée, est celle de l'exercice 1, question 1, du TD 8. (*Indication* : Montrer que le produit scalaire h_e sur T_eG est Ad–invariant. Puis utiliser la relation entre h, ∇ et $[\cdot,\cdot]$ permettant de construire ∇.)
2. Montrer que la courbure sectionnelle de G est positive ou nulle.
3. Montrer que l'application exponentielle (de Lie) de G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$, et l'application exponentielle (riemannienne) de (G,h), $\exp_e : T_eG \to G$, coïncident.
4. On suppose dans cette question que G est compact.
   (a) Rappeler pourquoi G admet une métrique bi-invariante.
   (b) Montrer que l'application $\exp : T_eG \to G$ est surjective.
   (c) En déduire qu'il existe des points distincts reliés par au moins deux géodésiques distinctes.
5. (a) Montrer que l'application inverse $i : G \to G$ définie par $i(g) = g^{-1}$ est une isométrie de (G,h) fixant e telle que $T_e i = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in G$, il existe une isométrie s_x de (G,h) fixant x et telle que $T_x s_x = -\mathrm{id}_{T_xG}$ (G est alors dit *espace globalement symétrique*.)