Feuille 11

Exercice 1. Applications du théorème de Myers aux groupes de Lie.
Soit G un groupe de Lie connexe admettant une métrique riemannienne bi-invariante et dont le centre de l'algèbre de Lie est trivial. En utilisant le théorème de Myers, montrer que G et son revêtement universel sont compacts.

Exercice 2. Effondrement d'un quotient de $\mathrm{Heis}(3)$ **par le flot de Ricci.**
On considère le sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ défini par $\mathrm{Heis}(3) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$. On rappelle que son algèbre de Lie possède une base (X_1, X_2, X_3) pour laquelle $[X_1, X_2] = X_3$ et $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$. On note $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ la base duale vue comme base de l'ensemble des 1–formes invariantes à gauche sur $\mathrm{Heis}(3)$. On s'intéresse aux métriques invariantes à gauche sur $\mathrm{Heis}(3)$ de la forme $g_{A,B} = A\alpha_1^2 + A\alpha_2^2 + B\alpha_3^2$.

1. Calculer les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à $g_{A,B}$. En déduire la courbure sectionnelle des champs de plans $\ker \alpha_i$.
2. Calculer le tenseur de Ricci de $g_{A,B}$.

Sur une variété V quelconque, une courbe de métriques riemanniennes est une application $t \mapsto g(t)$ d'un intervalle I vers l'ensemble des métriques riemanniennes sur V. Elle est dite lisse si, pour tout x dans V, la fonction de I dans $S^2T_x^*M$ qui envoie t sur $g(t)_x$ est lisse. On appelle solution du flot de Ricci sur V avec condition initiale g_0 toute courbe lisse de métriques $g(t)$ vérifiant, en tout point x,

$$\frac{d}{dt}\big(g(t)_x\big) = -2\,\mathrm{Ric}_x^{g(t)} \quad \text{et} \quad g(0) = g_0.$$

3. Montrer que, pour toute condition initiale de la forme g_{A_0,B_0} sur $\mathrm{Heis}(3)$, il existe une solution du flot de Ricci, $t \mapsto g_{A(t),B(t)}$, où A et B sont des fonctions que l'on exprimera en fonction de A_0 et B_0. (*Indication.* On pourra résoudre l'équation différentielle satisfaite par la fonction $y = \frac{A^2}{B}$.)

On considère l'action par multiplication à gauche du sous-groupe discret de $\mathrm{Heis}(3)$

$$\Gamma = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Montrer que l'application $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \mapsto (x, y)$ induit une submersion de $V = \Gamma \backslash \mathrm{Heis}(3)$ sur $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Décrire les fibres de cette submersion et en déduire que V est compacte.
5. Montrer qu'il existe des constantes c_1 et c_2, dépendant de A_0 et B_0, telles que les métriques $g(t)$ induisent sur V une courbe de métriques riemanniennes dont la courbure sectionnelle et le diamètre vérifient, lorsque t tend vers l'infini,
$$|K| \leq \frac{c_1}{t} \quad \text{et} \quad \mathrm{diam}(V) \leq c_2\, t^{\frac{1}{6}}.$$
6. En déduire que V est une variété *presque plate* : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique dont la courbure sectionnelle et le diamètre vérifient
$$|K| \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{diam}(V)^2}.$$
7. Montrer que V admet une courbe de métriques pour laquelle diamètre et courbure tendent vers zéro.

Exercice 3. Homogénéité et complétude.
Soit (M, g) une variété riemannienne connexe dont le groupe des isométries agit transitivement.

1. Montrer que le rayon d'injectivité de (M, g) en x est indépendant de $x \in M$.

2. Montrer que (M, g) est complète.

Exercice 4. Courbe de points fixes d'une isométrie.
Montrer que si une courbe lisse dans une variété pseudo-riemannienne est le lieu des points fixes d'une isométrie alors elle est l'image d'une géodésique.