Feuille 12

Exercice 1. La caténoïde.
On considère une surface de révolution Σ, paramétrée comme suit : $(u,\theta) \mapsto (r(u)\cos\theta, r(u)\sin\theta, z(u))$. On suppose que $z'(u)$ est partout non nul et l'on suppose alors que $u \mapsto (r(u), z(u))$ est paramétrée par la longueur d'arc.

1. Montrer que les courbes
$$\begin{aligned}&\gamma_1 : t \mapsto (r(u_0+t)\cos\theta_0, r(u_0+t)\sin\theta_0, z(u_0+t))\,, \quad \text{et}\\ &\gamma_2 : t \mapsto (r(u_0)\cos(\theta_0 + \frac{t}{r(u_0)}), r(u_0)\sin(\theta_0+\frac{t}{r(u_0)}), z(u_0))\end{aligned}$$
sont parcourues à vitesse 1, et se coupent orthogonalement en $t=0$.

2. Après avoir évalué la seconde forme fondamentale de Σ sur $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$, montrer que si Σ est minimale (i.e de courbure moyenne nulle), alors r et z satisfont l'équation différentielle :
$$r''z' - r'z'' = \frac{z'}{r}\,.$$

3. On pose $r = f(z)$. Montrer que l'équation devient $ff'' = 1 + (f')^2$.

On appelle *caténoïde* toute surface de révolution dans $\mathbb{R}^3$ de la forme $(z,\theta) \mapsto (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z)$, où $f(z) = a\cosh(\frac{z}{a}+b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. Ici z parcourt $\mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

4. Conclure que si Σ est minimale, c'est un morceau de caténoïde.

Exercice 2. L'espace hyperbolique complexe.
On munit $\mathbb{C}^{n+1}$ de la forme hermitienne $\langle z,z\rangle = -|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$, où $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$. Soit $Q_{-1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle z,z\rangle = -1\}$ et $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} = \pi(Q_{-1})$ son image par la projection $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$. Soit $[x] \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ et $u \in T_{[x]}\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. On définit $g_{[x]}(u,u) = \langle y,y\rangle$ où y est orthogonal à x et satisfait $T_x\pi(y) = u$ pour $x \in Q_{-1}$ tel que $\pi(x) = [x]$.

1. Montrer que g est correctement définie, et que $(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}, g)$ est une variété riemannienne. On l'appelle *l'espace hyperbolique complexe* de dimension n.

2. $\mathrm{U}(1,n)$ étant le sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ qui préserve $\langle\cdot,\cdot\rangle$, montrer que $\mathrm{PU}(1,n)$ agit isométriquement sur $(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}, g)$, et que l'action induite sur le fibré unitaire tangent à $(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}, g)$ est transitive.

3. Montrer que l'application $z \mapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ induit une isométrie ι sur $(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}, g)$.

4. Montrer que $(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}, g)$ est un espace symétrique.

5. Soit $x \in Q_{-1}$ et $u \in \mathbb{C}^{n+1}$ orthogonal à x, de norme 1. Montrer que $\gamma : t \mapsto \pi(\cosh t\, x + \sinh t\, u)$ est la géodésique passant par $\pi(x)$ en 0, et telle que $\gamma'(0) = T_x\pi(u)$. (*Indication.* On pourra s'inspirer de l'exo 5 du TD 10.)

6. On suppose que $n=1$. Montrer que $\varphi : z \mapsto \pi(1,z)$ réalise un difféomorphisme du disque unité dans $\mathbb{H}^1_{\mathbb{C}}$. Montrer que $\varphi^* g_z(u,u) = \frac{|u|^2}{(1-|z|^2)^2}$ pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. En déduire que $(\mathbb{H}^1_{\mathbb{C}}, g)$ est une variété riemannienne complète de courbure constante -4.

7. On suppose maintenant que $n \geq 1$.

   (a) Soit V un plan vectoriel complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$ sur lequel $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induit une forme de signature $(1,1)$. Montrer que $\pi(V\setminus\{0\}) \cap \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est une sous-variété de dimension réelle 2 totalement géodésique de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, de courbure sectionnelle constante égale à -4.

(b) Soit V un sous-espace vectoriel réel de dimension 3 de $\mathbb{C}^{n+1}$ invariant par l'involution $z \mapsto \overline{z}$ sur lequel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit une forme quadratique de signature $(1, 2)$. Montrer que $\pi(V \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est une sous-variété de dimension réelle 2 de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, totalement géodésique, de courbure sectionnelle -1.

8. On se place au point $[x_0] = \pi(e_0)$. Montrer que $R(T_{e_0}\pi(e_1), T_{e_0}\pi(e_2), T_{e_0}\pi(e_2), T_{e_0}\pi(e_1)) = -1$ et $R(T_{e_0}\pi(e_1), T_{e_0}\pi(ie_1), T_{e_0}\pi(ie_1), T_{e_0}\pi(e_1)) = -4$. En utilisant les identités de Bianchi, montrer que si $v = \lambda ie_1 + \mu e_2$, avec λ et μ réels tels que $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, et si P est le plan engendré par $T_{e_0}\pi(e_1)$ et $T_{e_0}\pi(v)$, alors :
$$K(P) = -3\lambda^2 - 1.$$
Conclure que la courbure sectionnelle de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est pincée entre -1 et -4.

9. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}, g)$ est engendré par $PU(1, n)$ et ι. (*Indication.* une application $\mathbb{R}$–linéaire de $\mathbb{C}^n$ qui envoie droite complexe sur droite complexe et préserve une norme hermitienne est dans le groupe unitaire de la forme hermitienne.)

Exercice 3. Courbure sectionnelle conforme et laplacien.
Soient g la métrique riemannienne standard de $\mathbb{R}^2$, et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on considère une métrique de la forme $g' = \varphi\, g$ où φ est une fonction lisse sur U.

1. À quelle condition sur φ, g' définit-elle une métrique riemannienne sur U ? On pose $\varphi = e^{2\sigma}$.

2. On dénote par ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g et par ∇' celle associée à g'. Montrer que pour tous X, $Y \in \Gamma(TU)$,
$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + (X \cdot \sigma)Y + (Y \cdot \sigma)X - g(X, Y)\nabla^g \sigma\,.$$
Où $\nabla^g \sigma$ est le champ de vecteurs défini par $d\sigma_x(h) = g_x(\nabla^g \sigma(x), h)$.

3. Soient $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ les champs de vecteurs coordonnées. Calculer, en fonction de σ, le tenseur de Chistoffel de la connexion ∇'.

4. Exprimer la courbure sectionnelle de g' en fonction du laplacien de σ, $\Delta\sigma$.

5. Retrouver ainsi que la métrique hyperbolique du modèle du demi-plan supérieur de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ a courbure -1.

Exercice 4. Champs de Jacobi sur les surfaces, et courbure.
Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension 2, x un point de M, et U un voisinage de l'origine dans T_xM sur lequel $\exp_x$ est un difféomorphisme sur son image. On considère sur U la métrique $h = \exp_x^* g$. Par le lemme de Gauss, h s'écrit en coordonnées polaires (r, θ) sur $U \setminus \{0\}$: $h = dr^2 + f^2(r, \theta)d\theta^2$.
Soient u, v des vecteurs orthonormés pour h_0. On suppose que les coordonnées polaires ont été choisies de telle sorte que l'angle θ associé à u soit nul.

1. Soient $c : r \mapsto ru$ et $r \mapsto V(r)$, le transport parallèle de v le long de c. Montrer que $J(r) = f(r, 0)V(r)$ est le champ de Jacobi le long de c de conditions initiales $J(0) = 0$ et $J'(0) = v$.

2. En déduire que la courbure sectionnelle de h en $c(r)$ est $-\frac{\partial_r^2 f(r,0)}{f(r,0)}$.

3. Retrouver la courbure sectionnelle de $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ de cette façon.